1.4 Racines : multiplicité, relations coefficients-racines

Définition 1.16 *Soit $c \in \mathbb{K}$, P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. On dit que c est* racine de multiplicité k *de P si $(X-c)^k$ divise P et $(X-c)^{k+1}$ ne le divise pas. Autrement dit, $P = (X-c)^k Q$ avec $Q(c) \neq 0$.*

Une racine de multiplicité 1 est dite *simple*, et une racine de multiplicité > 1 *multiple*.

Soient $c_1, \ldots, c_p$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Si c_i est racine de multiplicité k_i de P, pour $i = 0, \ldots, p$, alors $(X-c_1)^{k_1} \cdots (X-c_p)^{k_p}$ divise P. En conséquence :

Théorème 1.17 *Un polynôme de degré n de $\mathbb{K}[X]$ ne peut pas avoir plus de n racines comptées avec multiplicité dans $\mathbb{K}$.*

Ce théorème est souvent employé sous la forme suivante : *si un polynôme de degré $\leq n$ a plus de n racines comptées avec multiplicité, alors c'est le polynôme nul.*

Définition 1.18 *Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Son* polynôme dérivé *est par définition $P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}$. On note $P'', \ldots, P^{(k)}, \ldots$ les polynômes dérivés successifs.*

Les règles usuelles de dérivation de somme ou de produit s'appliquent.

Pour les deux résultat suivants, il faut supposer que $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Théorème 1.19 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, et c un élément de $\mathbb{K}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *c est racine de multiplicité k de P.*
2. *$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(k-1)}(c) = 0$ et $P^{(k)}(c) \neq 0$.*

En conséquence, c est racine de multiplicité $\geq k$ de P si et seulement si $P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(k-1)}(c) = 0$.

Théorème 1.20 (Formule de Taylor pour les polynômes) *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à d, et c un élément de $\mathbb{K}$. Alors*

$$P(X) = P(c) + P'(c)\,(X-c) + \frac{P''(c)}{2}\,(X-c)^2 + \frac{P^{(3)}(c)}{3!}\,(X-c)^3 + \cdots + \frac{P^{(d)}(c)}{d!}\,(X-c)^d\,.$$

Un polynôme de degré $n > 0$ est dit *scindé* sur $\mathbb{K}$ s'il a exactement n racines comptées avec multiplicité dans $\mathbb{K}$. Par exemple, le théorème de d'Alembert-Gauss entraîne que tout polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.

Théorème 1.21 *Soit $P = a_0 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ un polynôme unitaire de degré $n > 0$, scindé sur $\mathbb{K}$. Soit $c_1, \ldots, c_n$ ses racines comptées avec multiplicité (une racine de multiplicité k figure k fois). Alors :*

$$\begin{array}{rcl} -a_{n-1} & = & \sum_{1 \leq i \leq n} c_i \\ a_{n-2} & = & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} c_{i_1} c_{i_2} \\ & \vdots & \\ (-1)^k a_{n-k} & = & \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \\ & \vdots & \\ (-1)^n a_0 & = & c_1 c_2 \cdots c_n\,. \end{array}$$

Autrement dit, $(-1)^k a_{n-k}$ est la somme des produits k à k des racines. En particulier, a_{n-1} est l'opposé de la somme des racines et $(-1)^n a_0$ est le produit des racines.

Exercice 1.25

Soit P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ donné par $P(X) = 2X^3 + X^2 + X - 1$.

1. Montrer que, si P admet une racine rationnelle écrite sous forme irréductible p/q, alors p divise 1 et q divise 2.
2. En déduire toutes les racines rationnelles de P.
3. Trouver toutes les racines de P.

Exercice 1.26

Soit m, n et p trois entiers naturels. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$. Factoriser $X^8 + X^4 + X^3$. (On ne demande pas une décomposition en facteurs irréductibles).

Exercice 1.27

On considère le polynôme $P(X) = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$. Quelle est la multiplicité de 2 en tant que racine de P ?

Exercice 1.28

Trouver (a, b) pour que $(X - 1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$. Généraliser à $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 1.29

Trouver $P(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $(X - 1)^3$ divise $P(X) + 1$ et $(X + 1)^3$ divise $P(X) - 1$

1. en utilisant le polynôme dérivé P'.
2. en utilisant l'identité de Bezout.

Exercice 1.30

Trouver un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 4 tel que

$$\begin{array}{rcl} X^3 & \text{divise} & P(X) + 1 \ , \\ (X-1)^2 & \text{divise} & P(X) \ . \end{array}$$

Donner la décomposition en produits de facteurs irréductibles du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1.31

On considère le polynôme $P(X) = X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 20X^3 + 12X^2 - 4$ et on note P' son polynôme dérivé.

1. Déterminer le pgcd unitaire de P et P'.
2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1.32

On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ et on note P' son polynôme dérivé.

1. Calculer $D = \text{pgcd}(P, P')$.
   Trouver deux polynômes U et V tels que $D = UP + VP'$.
2. En déduire les racines doubles de P dans $\mathbb{C}[X]$ et ses décompositions en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1.33

Soit $A(X) = X^6 + aX^4 + bX^3 + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer a, b et c pour que 1 soit racine double de A et que j soit racine de A.
2. Montrer alors que $A \in \mathbb{R}[X]$ et que j est racine double.
3. Décomposer A en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.34

Soit $P(X) = 2X^3 - X^2 - 7X + a$.

Déterminer a pour que P ait deux racines de somme 1.

Exercice 1.35

Soit $P(X) = X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 11X^2 + 7X + 3$.

1. Calculer $P(j)$ et $P'(j)$. En déduire que P admet une unique racine réelle négative. Calculer cette racine en utilisant un coefficient du polynôme. Vérifier le résultat à l'aide d'un autre coefficient.
2. Donner la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Quel est le pgcd de P et P' ?

Exercice 1.36

Résoudre, dans $\mathbb{C}^3$, les systèmes symétriques suivants

$$1) \left\{ \begin{array}{rl} x+y+z & = 0 \\ xy+xz+yz & = -13 \\ xyz & = -12 \end{array} \right. , \qquad 2) \left\{ \begin{array}{rl} x+y+z & = -2 \\ x^2+y^2+z^2 & = 0 \\ x^3+y^3+z^3 & = 1 \end{array} \right. .$$

Exercice 1.37

Trouver un polynôme de degré trois dont les racines sont les carrés des racines du polynôme $X^3 + X^2 - 2X - 1$.